数理解析研究所講究録
519巻 1984年 193-210



# M/GI/s 待ち行列の待ち人数分布の近似式

東京理科大・理工　宮沢政清 (Masakiyo Miyazawa)

## 1. 序論

本論文の目的は、M/GI/s 型待ち行列モデル（すなわち、ポアッソン到着で、s個の窓口をもつ待ち行列）の待ち人数の平衡状態における分布の近似式を求めることである。また、有限待ち合い室をもつモデル，M/GI/s/k についても考察する。

M/GI/s に関する近似については、すでに各種のものが提案されている。平均待ち時間については、Takahashi (1977) や Boxima, Cohen and Huffels (1980) が優れた近似式を得ている。また，待ち人数分布については、Tijms, Van Hoorn, and Federgruen (1981) が、かなりよい結果を出している。

このように，すでにいくつもの優れた近似式が知られているのだが，その作り方をみると，経験と直感に頼っている部分が多いように思う。たとえば，Takahashi (1977) や Boxima et. al. (1980) では、平均待ち時間の近似式を、未知パラメー

タを含む形で与え，後で，適切な条件を満すようにこのパラメータを定めている。この場合，どんな形のパラメータ表現から出発するかが問題である。彼らの論文では，その与え方は、かなり直感的な方法である。平均や分散であれば、このような方法でも可能かもしれないが、分布となると困難である。

一方，Tijms et al. (1981) では、いくつかの条件を与え、それらから近似解を求めている。Hokstad (1978) も同様にして待ち人数分布の近似式を得た。この方法は、与える条件の意味が明確ならばわかりやすいし、また、モデルの変化に対する拡張性にも富んでいる。この論文でもこれと同じ考えが使われる。ただし，Tijms et al. (1981) や Hokstad (1978) と少し異なる点は、厳密解そのものを未知量を含んだ形で解き出し，その後で各種の条件を与え近似解を求めている所である。このような方法によれば，条件を変えて近似解を改良することが容易である。また、原理的には、近似の精度をいくらでも上げることができる。この論文においては、特に優れた近似式が得られたわけではない。ここでは、むしろ、近似式を得たり，改良したりするための提案であると考えてもらいたい。ただし，M/GI/1/k に関しては、かなりよい結果が得られたことを付記しておく。

2、平衡方程式及び厳密解のパラメータ表現

この節では、$M/GI/s/k$ について論じる。このモデルでは待つことのできる人数が $k$ に制限される。すなわち，$k$ 人待っている所へ到着した客は、すぐにシステムを退去する。この客も一応，到着及び退去に数える。また，$k=+\infty$ のときには、通常の $M/GI/s$ に一致する。

以下においては、まず $M/GI/s/k$ に関する平衡方程式を作り，次に、この方程式を、待ち人数分布の母関数に関して未知の量を含んだ形で解き出す。この節の結果は、近似のための仮定を何もしていないので，厳密に成り立つものである。はじめに、記号の説明をしよう。

$P$ …… 任意の時点における確率（$E$ … その期待値）

$P_0$ --- 時刻 0 に客の到着があったという条件のもとでの条件付確率（$E_0$ --- その期待値）

$P_1$ --- 時刻 0 に客の退去があったという条件のもとでの条件付確率（$E_1$ --- その期待値）

$S$ ---- 客のサービス時間：$G$ はその分布を表す。

$\lambda$ --- 客の平均到着率（= 平均退去率），$\rho=\lambda ES$

$l(t)$ -- 時刻 $t$ でのシステム内人数

$$l=l(0),\quad l^-=l(0-),\quad l^+=l(0+)$$

$r_i(t)$ --- $i$ 番目の窓口でサービス中の客の残りサービス時間，

$(i=1,2,\cdots,s)$ 窓口の指定がないときは$i$を略す。

$$r_i = r_i(0),\quad r_i^- = r_i(0-),\quad r_i^+ = r_i(0+)$$

$$r = r(0),\quad r^- = r(0-),\quad r^+ = r(0+)$$

$$p_n = P(\ell = n),\quad p_n^\circ = P_0(\ell^- = n),\quad p_n^* = P_1(\ell^+ = n)$$

$\widetilde{G}(\theta) = E(e^{-\theta S})$ ：サービス時間のラプラス変換

$$\phi_j(\theta) = E(e^{-\theta r} \mid r>0,\ \ell=j) \qquad (j=0,1,2,\cdots,s+k,\ \theta \geq 0)$$

$$\phi_j^\circ(\theta) = E_0(e^{-\theta r} \mid r^->0,\ \ell^-=j) \qquad (\quad〃\quad)$$

$$\phi_j^*(\theta) = E_0(e^{-\theta r} \mid r^->0,\ \ell^+=j) \qquad (\quad〃\quad)$$

本論で扱うモデルでは、客は空いている窓口を等確率で選ぶとする。このとき，$r_1,\cdots,r_s$は、同一分布に従う。Finchの公式と同様にして，$p_n^\circ = p_n^*$ $(n=0,1,2,\cdots)$であることが、わかる。また、到着がポアッソン過程であることから，$p_n = p_n^\circ$ $(n=0,1,2,\cdots)$も得られる。ここに，$\{(\ell(t), r_1(t),\cdots,r_s(t))\}$は、定常過程をなしていると仮定する。$k=+\infty$のときは、平衡条件 $\lambda E(S)<s$ のもとで、そのような定常過程を作ることができる（Miyazawa（1979）を参照）。$k<+\infty$のときは、到着過程がポアッソンであることより，何の条件もなしに，この定常過程を作ることができる。これらのことから，Miyazawa（1983）による保存則を、この定常過程に適用できる。これらの詳略については、Miyazawa（1984）を見られたい。次に結果のみをあげる。

定理 2.1　$M/GI/s/k$　($k<+\infty$ or $k=+\infty$) において，平衡状態が存在するならば，$\forall\theta>0$ と，$j=1,2,\cdots,s+k-1$ に対して，

$$
(2.1)\quad \begin{aligned}
&\theta \min(s,j)\,\phi_j(\theta)\,p_j \\
&= \lambda\{(\min(s,j)-1)\,\phi^{*}_{j-1}(\theta)+1) - (\tilde{G}(\theta) I_{\{j<s+1\}} + \min(s,j-1)\,\phi_{j-1}(\theta)\}\,p_{j-1} \\
&\quad -\lambda\{\tilde{G}(\theta) I_{\{j>s-1\}} + \min(s-1,j)\,\phi^{*}_j(\theta) - \min(s,j)\,\phi_j(\theta)\}\,p_j
\end{aligned}
$$

が成り立ち，また，$k<+\infty$ のときには，$j=s+k$ に対して，

$$
(2.2)\quad \theta s\,\phi_j(\theta)\,p_j = \lambda\left[1+(s-1)\,\phi^{*}_{j-1}(\theta) - \min(s,j-1)\,\phi_{j-1}(\theta) - \tilde{G}(\theta) I_{\{k=0\}}\right] p_{j-1}
$$

が成り立つ。ここに，$I_A$ は、集合 $A$ の指示関数である。

次に，$\theta\geq 0$，$|x|\leq 1$ に対して，

$$
\psi(\theta,x) = \sum_{i=s}^{s+k} \phi_i(\theta)\, x^{(i-s)}\, p_i
$$

とおく。(2.1)，(2.2) に、$x^{i-s}$ を掛けて加えることにより，次式が得られる。

$$
(2.3)\quad \begin{aligned}
&(\theta s - \lambda(1-x))\,\psi(\theta,x) + \lambda(\tilde{G}(\theta) - x)\,\psi(\theta,x) \\
&= \lambda(1-\tilde{G}(\theta)) + L(\theta) + M(\theta,x) + N(\theta,x)
\end{aligned}
$$

ここに，

$$
L(\theta) = \lambda(s-1)\,(\phi^{*}_{s-1}(0,\theta) - \phi^{\circ}_{s-1}(0,\theta))
$$

$$M(\theta, x) = \lambda(\hat{G}(\theta) - x - (1-x)\phi_{s+k}(0,\theta))x^k p_{s+k}$$
$$N(\theta, x) = \lambda(s-1)(1-x)\sum_{i=s}^{s+k-1}(\phi_i(\theta) - \phi_i^*(\theta))x^{i-s} p_i$$

とする。

いま，$\theta = \theta(x) \equiv \lambda(1-x)/s$ とおくと，$\theta s - \lambda(1-x) = 0$ である。したがって，(2.3) より，

$$(2.4) \quad \psi(0, x) = \frac{(1-\hat{G}(\theta(x)))p_{s-1} + L(\theta(x)) + M(\theta(x), x) + N(\theta(x), x)}{\hat{G}(\theta(x)) - x}$$

が得られる。$p_{s-1}$，$L(\theta)$，$M(\theta, x)$，$N(\theta, x)$ は，必ずしも簡単な量ではないが，これらを何らかの方法で定めることができれば近似解が得られる。(2.4) は，$\psi(0, x)$の一種のパラメータ表現であるが，1つの面白い性質をもっている。それは，(2.4) の分母で，その零点を$\eta$とすると，すなわち，

$$\hat{G}(\theta(\eta)) - \eta = 0 \qquad (\eta > 0)$$

とすれば，$\eta$は，M/PH/$s$ の場合に，$p_n/p_{n+1}$ の $n \to \infty$での極限値になっている(Takahashi (1981) を参照)。これより，$k = +\infty$ ときには，(2.4)の$\psi$は，$L$, $M$, $N$ 等が $0 \le x \le \eta$ で有限であるなら，少なくとも大きな$n$に対して$p_n$のより近似を与えることが期待できる。

3. M/GI/$s$ の近似式

$k = +\infty$ の場合には，$M(\theta, x) \equiv 0$ であるから，$L$，$N$ 及び

$p_{s-1}$を定めればよい。ここでは、そのために、いくつかの仮定をおこなう。これらの仮定が使われると，$\psi$は、もはや真の解ではなくなるので，$\psi(0,x)$ (app) と表わす。$p_{s-1}$などの他の量についても，仮定を使って値を定めたときには、(app) と付記する。

$p_0, p_1, \cdots, p_{s-1}$に対しては、M/M/s の値が、かなりよい近似を与えることが知られている。M/M/s のときの $p_i$ を $p_i(\exp)$ と表わすことにしよう。すなわち，

$$p_0(\exp) = \frac{1}{\sum_{j=0}^{s-1}(\lambda ES)^j/j! + (\lambda ES)^s/(1-\rho)s!}$$

$$p_j(\exp) = \frac{(\lambda ES)^j}{j!}p_0 \qquad (j=1,2,\cdots,s-1)$$

とおく。また，S の残余寿命の定常分布のラプラス変換を $\widetilde{G}_e(\theta)$ とする。すなわち，

$$\widetilde{G}_e(\theta) = \frac{1-\widetilde{G}(\theta)}{\theta ES}$$

次の補題は、$p_0, \cdots, p_{s-1}$に対して，M/M/s 近似が可能となる十分条件を与えている。

補題 3.1 $|\phi_j'(0)| = |\phi_j^{*\prime}(0)| < +\infty$ $(j=1,2,\cdots,s-1)$ ならば，

$$(3.1) \qquad p_j(\mathrm{app}) = p_j(\exp) \qquad (j=0,1,\cdots,s-1)$$

が得られる。

よく、サービス時間の残余寿命分布として、$\widetilde{G}_e$ を仮定することがあるが、次の補題は、これに一つの理論的裏づけを与える。

補題3.2 任意の $\theta>0$ と $j=1,2,\cdots,s-1$ に対して、$\phi_j(\theta)=\phi_j^*(\theta)$ ならば、$j=1,2,\cdots,s-1$ に対して、

(3.3) $\phi_j^*(app)=\widetilde{G}_e$

が得られる。

これらの補題においては、独立性の仮定がないことに注意してほしい。Nozaki and Ross (1978) にあるような独立性の仮定は、結局必要ないことがわかる。さて、近似解を得るために次の仮定を使おう。

(A) $\phi_j'(0)=\phi_j^{*\prime}(0)$ $j=1,2,\cdots,s-1$

(B) $\phi_{s-1}(\theta)=\phi_{s-1}^{*}(\theta)$ $\forall\theta>0$

(B′) $\phi_{s-1}'(0)=\phi_{s-1}^{*\prime}(0)$

(C, j) $\phi_i(\theta)=\phi_i^*(\theta)$ $\forall\theta>0$, $i=j,j+1,\cdots$

(C′, j) $\phi_i'(0)=\phi_i^{*\prime}(0)$ $i=j,j+1,\cdots$

ここに、微分は、すべて右微分を表わし、それらは、有限の値になっているものとする。(C, j), (C′, j) では、$j$ の値によって条件が変ることに注意してほしい。(2.4) より、す

ぐ次の結果が得られる。

定理 3.1 $M/GI/s$ において，(A), (B), (C, s) が成り立つならば，$\forall x$ ($|x|<1$) に対して，

$$(3.3) \quad \psi(0, x)(app) = \frac{1-\hat{G}(\theta(x))}{\hat{G}(\theta(x))-x} p_{s-1}(exp)$$

が得られる。ここに，$\rho \doteq \lambda ES/s < 1$ とする。

この結果は，Hokstad (1978) 及び Tijms et al. (1981) の case B の近似式である。(3.3) より平均待ち人数を求めることができるが，平均に関してだけならば，条件は次のようにゆるめることができる。

系 3.1 $M/GI/s$ において，(A), (B′), (C′, s) が成り立つならば，

$$(3.4) \quad Eq(app) = \frac{\lambda^2 E(S^2)}{2s^2(1-\rho)^2} p_{s-1}(exp).$$

ここに，$q=(l-s)^+$ すなわち，$q$ は待ち人数を表わす。

(3.4) は，Nozaki and Ross (1978) の結果と同じである。(3.3), (3.4) は，数値的に必ずしも満足できるものではない。Tijms et al. (1981) では，Case A としてこれを改良した

近似式を提案している。これは、定理3.1の仮定をゆるめることにより改善を試みよう。

定理3.2　$M/GI/s$において，(A)，(B)，$(C, s+1)$が成り立ち$\phi_s(\theta)(app)$及び$p_s(app)$が与えられたならば，$\forall x\,(|x|<1)$に対して，

(3.5)　$\psi(0, x)(app)$

$$= \frac{\lambda x(1-\tilde{G}(\theta(x)))p_{s-1}(app)+(1-x)(s\theta(x)-\lambda)\phi_s(\theta(x))(app)+\lambda\tilde{G}(\theta(x))p_s(app)}{\lambda(\tilde{G}(\theta(x))-x)}$$

が得られる。(3.5)は，$M/M/s$に対しては，真の値と一致する。

この定理の詳しい証明は，Miyazawa (1984)にある。

(3.5)を実際に使うためには，$\phi_s(\theta)(app)$と$p_s(app)$を具体的に与えてやる必要がある。ここでは次の2条件からこれらを定めよう。

(Θ)　$\phi_s(\theta)(app) = \tilde{G}_e(\theta)$　　　$\forall\theta>0$

$(E, \theta_0)$　$\phi_s(\theta_0) = \phi_s^*(\theta_0)$

条件$(E, \theta_0)$においては，$\theta_0$の値により条件は変わる。(Θ)及び$(E, \theta_0)$の条件のもとで，$p_s$が定理1の関係式をもちいて次のように決定できる。

$$(3.6)\quad p_s(\mathrm{app}) = \frac{\lambda(1-\widetilde{G}(\theta_0 s))}{(\theta_0 s-\lambda)\phi_s(\theta_0)+\lambda\widetilde{G}(\theta_0)}\, p_{s-1}(\mathrm{exp})$$

この論文では、$\theta_0=\lambda$ として近似式を作る。$\theta_0=\frac{\lambda}{s}$ とした場合には、$p_s(\mathrm{app})$ は Hokstad (1978) らの近似における $p_s$ に一致する。(3.6) 及び (D) により、(3.5) の $\psi(0, x)$ が決定できる。これより次の系が得られる。

系 3.2 M/GI/s において、(A), (B′) (C′, s+1) (D) (E, $\theta_0$) が成り立つならば、

$$(3.7)\quad Eq(\mathrm{app}) = \frac{\lambda^2 E(S^2)}{2s^2(1-\rho)^2}\, p_{s-1}(\mathrm{exp}) + \frac{\rho\, p_{s-1}(\mathrm{exp}) - (1+\rho(\delta_s^2-1)/2)\, p_s(\mathrm{app})}{1-\rho}$$

が得られる。ここに、$p_s(\mathrm{app})$ は、(3.6) により与えられるとする。

$q$ の分散についても (3.5) より求まるがここでは略す。

## 4. M/GI/s/k の場合

$k<+\infty$ とし，有限待ち合い室の場合を考える。この場合には、(C, $j$) の条件を次のように変える。

$(C_1, j, s+k)$ : $\phi_i(\theta) = \phi_i^*(\theta)$ $\quad \forall\theta > 0, \; i = j, j+1, \cdots, s+k-1$

$(C_2, s+k)$ $\quad \phi_{s+k}(\theta) = \tilde{G}_e(\theta) \quad \forall\theta > 0.$

有限待ち合い室の場合には、(2.4)式は、すべての$x$で存在しなければならない。したがって、$\tilde{G}(\theta(x)) - x = 0$ を満す$x$に対し、(2.4)の右辺の分布は0でなければならない。$x = \gamma (> 0)$が、その1と異なる唯一の解である。これと、仮定により次の結果が得られる(Miyazawa (1984))。

定理4.1 M/GI/s/k において(A), (B), $(C_1, s, s+k)$, $(C_2, s+k)$が成り立つならば、

$$(4.1) \quad p_0(app) = \frac{1}{\sum_{j=0}^{s-1} \frac{1}{j!}(\lambda E(S))^j + \frac{(1-\rho\gamma^{-k})(\lambda ES)^s}{(1-\rho)s!}}$$

$$(4.2) \quad p_j(app) = \frac{(\lambda ES)^j}{j!} p_0(app) \qquad (j = 1, 2, \cdots, s-1)$$

$$(4.3) \quad p_{s+k}(app) = \rho\gamma^{-k} p_{s-1}(app)$$

$$(4.4) \quad \psi(0, x)(app) = \frac{1 - \tilde{G}(\theta(x))}{\tilde{G}(\theta(x)) - x}\left(p_{s-1}(app) - x^k p_{s+k}(app)/\rho\right) + x^k p_{s+k}(app)$$

が得られる。また、これらは、M/M/1 の場合には、真の値と一致する。

平均待ち人数については、(4.4)より，

系4.1　定理4.1と同じ条件のもとで，

$$(4.5)\qquad Eq(app)=\frac{\lambda^2 E(S^2)\,(P_{s-1}(app)-P_{s+k}(app)/\rho)}{2s^2(1-\rho)^2}-\frac{k\rho P_{s+k}(app)}{1-\rho}$$

$$(4.6)\qquad Eq^2(app)=\frac{2\rho^2 m_3+3\rho(1+\rho^2 m_2)m_2}{6(1-\rho)^3}(\rho P_{s-1}(app)-P_{s+k}(app))$$
$$-\frac{k\rho}{(1-\rho)^2}(m_2+(k-1)(1-\rho))P_{s+k}(app)$$

ここに，$P_{s-1}(app)$，$P_{s+k}(app)$ は，(4.2)及び(4.3)で与えられる。また，$m_i=E(S^i)/(E(S))^i$　$(i=2,3)$ とする。

定理4.1及び系4.1の近似式には，いくつかの欠点がある。その第一は，$\rho=1$ に対しては使えないことである。(4.1)や(4.5)を見てわかるように，$\rho=1$ のときは，計算できない。次に，(4.4)は，本来 k次の多項式でなければならないが一般にはそうなっていない。これらの欠点にもかかわらず数値的にはかなりよい結果が出る。これについては次節で考察する。なお(4.4)は，$k=0$ のときは真の値に一致し，$k=+\infty$ のときは，Hokstad (1978) らの近似式と同じものになることを注意しておこう。もちろん，(4.1)～(4.6)をさらに改善することは容易であるが，式が複雑化しすぎてしまう。

## 5、考察

得られた近似式についての考察をおこなう。数値計算例についても検討してみる。

### (i) M/GI/s の場合

定理 3.2 の (3.5) による近似は、$\rho \uparrow 1$ のときには、heavy traffic 近似に一致するので、真の値に近づく。これは、Hokstad (1978) や Tijms et al. (1981) の case A, Case B の場合と同じである。しかし、$\rho \downarrow 0$ に対しては、ずれが生じる。これは、たとえば、Boxma et al. (1980) によって提案された normed cooperation co-efficient $N_{G_s}$ を計算するとわかる。Burman and Smith (1983) によると

$$(5,1) \quad \lim_{\rho \downarrow 0} N_{G_s}(\rho) = \frac{ES^2}{2ES\, s\int_0^{+\infty}(1-G_e(v))^s dv}$$

が成り立つ（ただし、M/PH/s の場合にのみ証明されている）。ここに、$G_e$ は、S の残余寿命定常分布であり、そのラプラス変換は、$\tilde{G}_e$ である。(3.5) の場合、条件 (B)、$(E, \theta_0)$（$\theta_0$ は任意）のもとで $N_{G_s}(\rho)$ を計算すると、

$$(5,2) \quad \lim_{\rho \downarrow 0} N_{G_s}(\rho) = \frac{ES^2}{2ES \cdot ES}$$

となる。したがって、M/M/s に対しては (5,1), (5,2) は一致するが、一般には一致しない。実際、$\rho \downarrow 0$ にして数値計算

結果を比較すると，Hokstad（Tijms et al. の Case B と同じ）よりはよいが，真の値との相対誤差は大きくなる。この点を除いては、一般に、Tijms et al. の case A の近似式とたいへんよく似た数値を与える。一部の数値例と、相対誤差のグラフを，表1及び図1に与える。

(ii) $M/GI/s/k$ $(k<+\infty)$ の場合

この場合には，陽な近似式は，Nozaki and Ross (1978) を除いてほとんどない。彼らの結果は平均待ち人数であるが，数値例をみてわかるように余りよくない。これに対して，(4.5) の近似式は、これをずっと改善している。前節の終りに述べたように、$\rho=1$ では、(4.5)の近似式は使えない。そこで $\rho=1$ の付近を調べてみたが、数値的に案外安定している。なお、(4.5) の式は、Nozaki and Ross (1978) の仮定を完全にゆるめたものから導びかれたものなので，(4.5)が、彼らの近似式よりよいのは当然のことである。$p_0$ や $p_{s+k}$ についても定理4.1で近似式が得られたので、数値的な比較をおこなった。この場合には、$p_0$は全体的によいが，$p_{s+k}$（つまり呼損率）は、$\rho$ が小さい所で誤差が大きいようである。逆に $\rho$ が1以上では非常によい近似になっている。なおこれらの数値結果は表2及び表3に与えられている。

## 表1. M/GI/s の比較（平均待ち人数）

サービス分布：$pM(\mu_1)+(1-p)M(\mu_2)$（超指数分布）

ここに，$v$を変動係数とし，$p=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[\frac{v^2-1}{v^2+1}\right]^{\frac{1}{2}}$, $\mu_1=2p$, $\mu_2=2(1-p)$

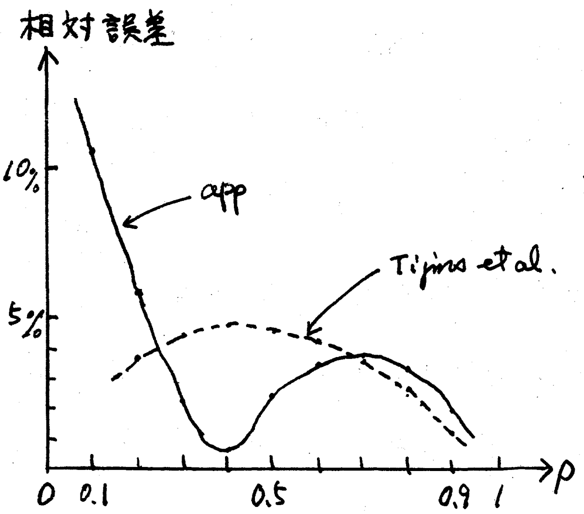
とする。（app を除いて 数値は、Tijms et al.(1981)より引用した。）

| | (i) $v=2,\rho=0.8$ | | | (ii) $v=5,\rho=0.8$ | | | (iii) $v=5,\rho=0.9$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | s=5 | s=10 | s=25 | s=5 | s=10 | s=25 | s=10 | s=25 |
| (exact) | 3.170 | 2.267 | 1.093 | 5.923 | 4.036 | 1.767 | 16.53 | 11.67 |
| (app) | 3.144 | 2.309 | 1.175 | 5.921 | 4.319 | 2.188 | 16.96 | 12.83 |
| (Tij) | 3.140 | 2.304 | 1.173 | 5.870 | 4.283 | 2.180 | 16.90 | 12.81 |
| (Hok) | 3.325 | 2.455 | 1.255 | 6.649 | 4.910 | 2.509 | 18.06 | 13.71 |

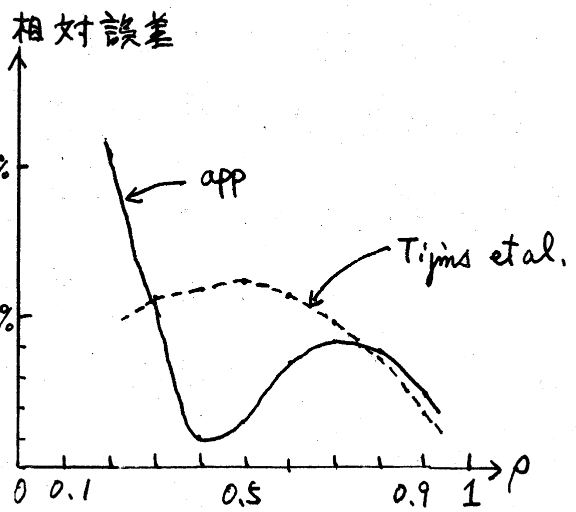
app = (3.7) of this report ($\theta_0=\lambda$)
Hok = Hokstad's (= Case B of Tijms et al.'s)
Tij = Case A of Tijms et al.'s

## 図1 M/GI/s の比較（平均待ち人数の相対誤差）

サービス分布：次数$j$のアーラン分布




$s=2$, $j=5$ の場合




$s=4$, $j=4$ の場合

表2　M/GI/s/k の比較(平均待ち人数)

サービス分布：次数3のアーラン分布 / Noz = Nozaki and Ross の近似
サーバー数　：s = 3

| | k=2 | k=5 | k=10 | k=20 | k=30 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ρ=0.3 | 0.01880 | 0.02196 | 0.02202 | 0.02202 | | (exact) |
| | 0.01777 | 0.01998 | 0.02001 | 0.02001 | | (app) |
| | 0.01452 | 0.01971 | 0.02001 | 0.02001 | | (Noz) |
| ρ=0.6 | 0.17720 | 0.32808 | 0.36752 | 0.36943 | 0.36943 | (exact) |
| | 0.18478 | 0.32072 | 0.35322 | 0.35474 | 0.35474 | (app) |
| | 0.08459 | 0.25134 | 0.34046 | 0.35485 | 0.35458 | (Noz) |
| ρ=0.9 | 0.4833 | 1.429 | 2.744 | 4.19538 | 4.71849 | (exact) |
| | 0.52701 | 1.48026 | 2.76944 | 4.18212 | 4.68857 | (app) |
| | -0.76830 | -0.31598 | 0.87958 | 2.79606 | 3.89426 | (Noz) |
| ρ=1.1 | 0.66878 | 2.23844 | 5.83879 | 14.1267 | 23.4519 | (exact) |
| | 0.76975 | 2.50339 | 5.98994 | 14.3170 | 23.6604 | (app) |
| | 3.01045 | 5.66563 | 9.58967 | 17.9966 | 27.4018 | (Noz) |
| ρ=1.5 | 1.04995 | 3.61523 | 8.49902 | 18.4903 | 28.4903 | (exact) |
| | 1.15033 | 3.77609 | 8.67426 | 18.6666 | 28.6666 | (app) |
| | 2.40875 | 6.15710 | 13.1454 | 28.0047 | 43.0000 | (Noz) |

表3　M/GI/s/k の比較(客の損失率$(=p_{s+k})$)
条件は表2と同じ。

| | k=2 | k=5 | k=10 | k=20 | k=30 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ρ=0.3 | 2.84E-3 | 2.48E-5 | 6.65E-9 | 4.23E-16 | | (exact) |
| | 1.78E-3 | 1.24E-5 | 3.11E-9 | 1.98E-16 | | (app) |
| ρ=0.6 | 4.20E-2 | 4.60E-3 | 1.16E-4 | 7.34E-8 | 4.66E-11 | (exact) |
| | 3.42E-2 | 3.59E-3 | 9.00E-5 | 5.71E-8 | 3.62E-11 | (app) |
| ρ=0.9 | 1.4 E-1 | 6.02E-2 | 2.12E-3 | 3.85E-3 | 7.83E-4 | (exact) |
| | 1.29E-1 | 5.62E-2 | 2.01E-3 | 3.68E-3 | 7.47E-4 | (app) |
| ρ=1.1 | 2.22E-1 | 1.48E-1 | 1.12E-1 | 9.51E-2 | 9.18E-2 | (exact) |
| | 2.12E-1 | 1.44E-1 | 1.11E-1 | 9.50E-2 | 9.18E-2 | (app) |
| ρ=1.5 | 3.74E-1 | 3.39E-1 | 3.33E-1 | 3.33E-1 | 3.33E-1 | (exact) |
| | 3.62E-1 | 3.38E-1 | 3.33E-1 | 3.33E-1 | 3.33E-1 | (app) |

注) 真の値は、高橋幸夫氏(東北大)による Lumping 法をもちいて計算した。解の収束誤差は 1.0E-7$(=10^{-7})$である。

# 参考文献

[1] Burman,D.Y. and Smith,D.R. (1983) A light-traffic theorem for multi-server queues, Math. Opns. Res. 8, 15-25.

[2] Hokstad,P. (1978) Approximations for the M/G/m queue. Opns. Res. 26, 510-523.

[3] Kimura,T. (1983) M/G/s 待ち行列の近似について (本講究録)

[4] Miyazawa,M. (1979) A formal approach to queueing processes in the steady state and their applications. J. Appl. Prob. 16, 332-346.

[5] Miyazawa,M. (1983) Intensity conservation law for queues with randomly changed service rate. (submitted to J. Appl. Prob.)

[6] Miyazawa,M. (1984) Approximations of the queue length distributions in M/GI/s and M/GI/s/k queues. (in preparation).

[7] Nozaki,S.A. and Ross,S.M. (1978) Approximations in finite-capacity multi-server queues with Poisson arrivals. J. Appl. Prob. 15, 826-834.

[8] Takahashi,Y. (1977) An approximation formula for the mean waiting time of an M/G/c queue. JORSJ 20, 150-163.

[9] Tijms,H.C., Van Hoorn,M.H., and Federgruen,A. (1981) Approximations for the steady-state probabilities in the M/G/c queue. Adv. Appl. Prob. 13, 186-206.

[10] Van Hoorn,M.H. (1983) Algorithms and approximations for queueing systems. Vrije Universiteit te Amsterdam (Doctor Thesis).

[11] Boxima,O.J., Cohen,J.W., and Huffels,N. (1980) Approximations of the mean waiting time in an M/G/s queueing systems. Opns. Res. 27, 1115-1127.